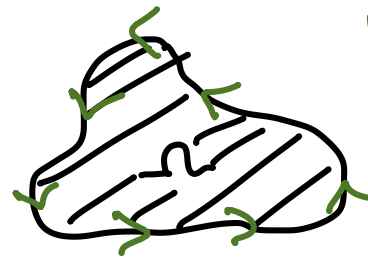


Infos : Évaluation du cours sur IS-ACADEMIA

Orientation du bord :



laisse le domaine
à gauche :
orientation
positive !



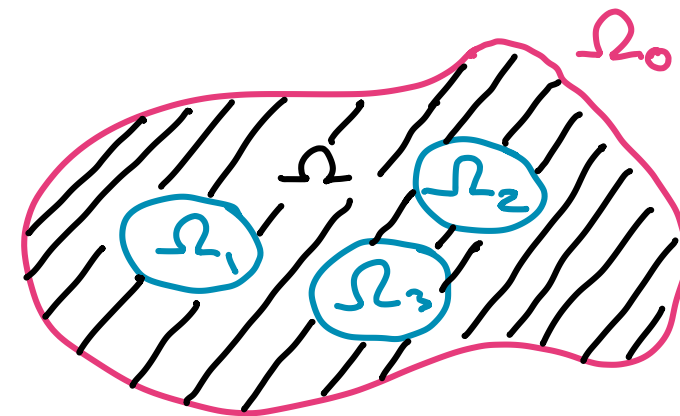
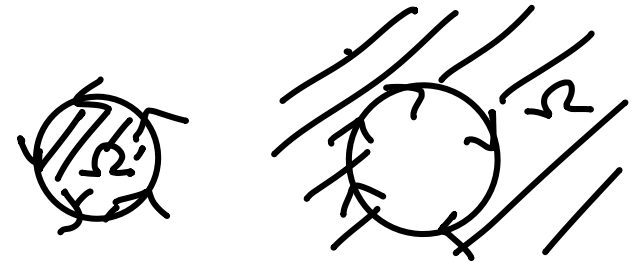
laisse le domaine
à droite :
orientation
négative

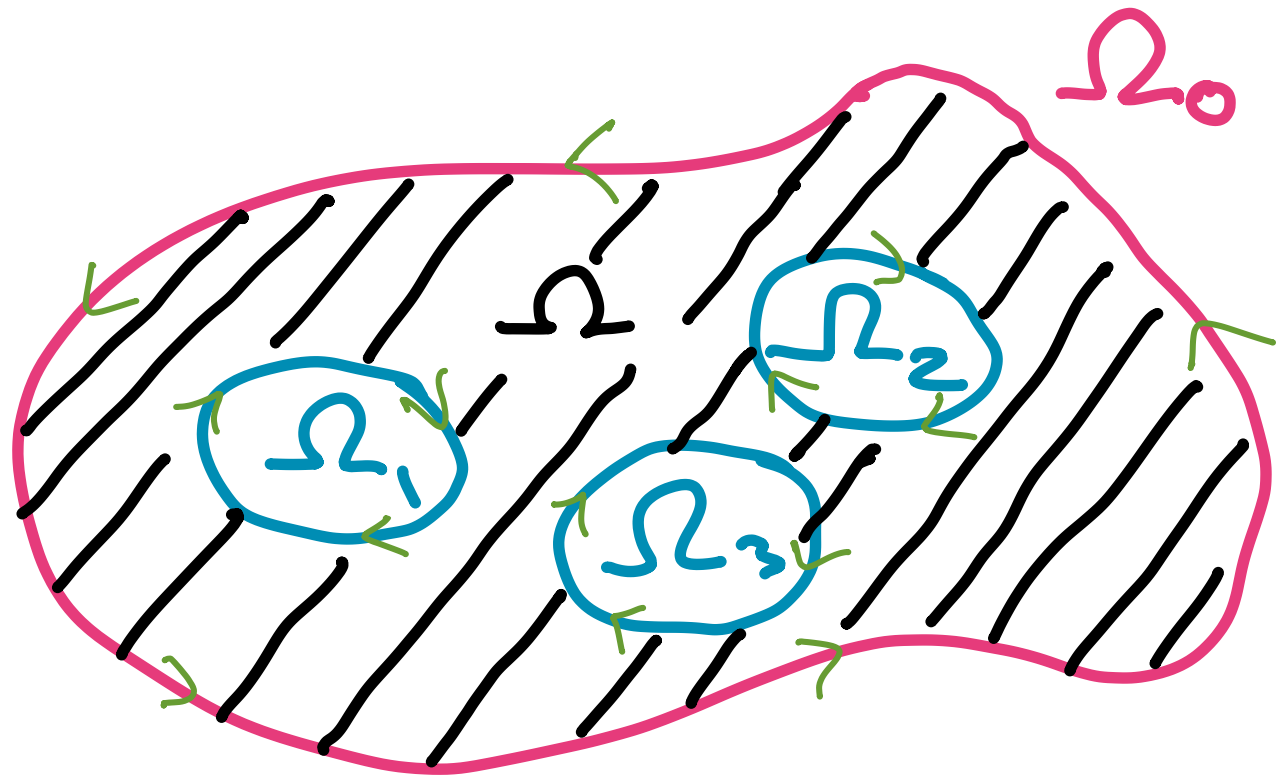
Def 2.15 : (iii) $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un ouvert borné est un
domaine régulier si $\exists \Omega_0, \Omega_1, \dots, \Omega_m$ des ouverts

bornés tq

- $\forall 1 \leq j \leq m \quad \overline{\Omega_j} \subset \Omega_0$
- $\forall 1 \leq i, j \leq m, \text{ tq } i \neq j, \quad \overline{\Omega_i} \cap \overline{\Omega_j} = \emptyset$
- $\Omega = \Omega_0 \setminus \left[\bigcup_{j=1}^m \overline{\Omega_j} \right]$
- $\forall 0 \leq j \leq m, \partial \Omega_j = \Gamma_j$ est simple régulière fermée

⚠ la notion
d'orientation
d'une courbe
n'a de sens que
si elle est (un bout)
du bord d'un
domaine !





Le bord $\partial\Omega = T_0 \cup T_1 \cup \dots \cup T_m$ est orienté positivement si chaque sens de parcours laisse le domaine à gauche.

Théorème 2.16 : Théorème de Green.

Soit $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ un domaine régulier dont le bord $\partial\Omega$ est orienté positivement et $F \in C^1(\overline{\Omega}; \mathbb{R}^2)$ un champ vectoriel

Alors,

$$\iint_{\Omega} \operatorname{rot} F(x, y) dx dy = \int_{\partial\Omega} F \cdot dl$$

← vrai uniquement si $\partial\Omega$ est orienté positivement

Remarque 2.17

(i) On retrouve la structure

$$\int_{\text{intérieur}} \text{dérivées} = \int_{\text{bord}} \text{fonction}$$

qu'on a dans

le thm fond. du calcul intégral: $\int_a^b f'(x) dx = f(b) - f(a)$

(ii) Si F dérive d'un potentiel, le théorème se lit $0 = 0$

Exemples 2.18

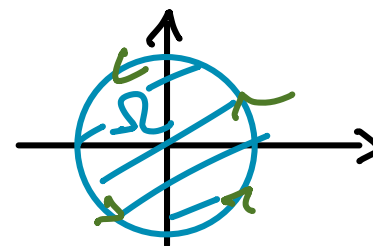
(i) $\Omega = B((0,0), 1) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$

$$F(x,y) = (-y, x)$$

$$\text{rot } F = \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} = 1 - (-1) = 2.$$

Coord. pour Ω : coordonnées polaires:

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta, \quad r \geq 0, \quad \theta \in [0, 2\pi].$$



$$x^2 + y^2 < 1 \Leftrightarrow r^2 < 1 \Leftrightarrow \begin{matrix} 0 \leq r < 1 \\ r \geq 0 \end{matrix}$$

Jacobien : r

$$\Rightarrow \iint_{\Omega} \text{rot } F(x, y) dx dy = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \underbrace{2 \cdot r}_{\text{rot } F(r \cos \theta, r \sin \theta)} dr d\theta = 2\pi$$

→ Jacobien.

$$\partial \Omega: \gamma(t) = (\cos t, \sin t) \quad t \in [0, 2\pi]$$

$$\gamma'(t) = (-\sin t, \cos t)$$

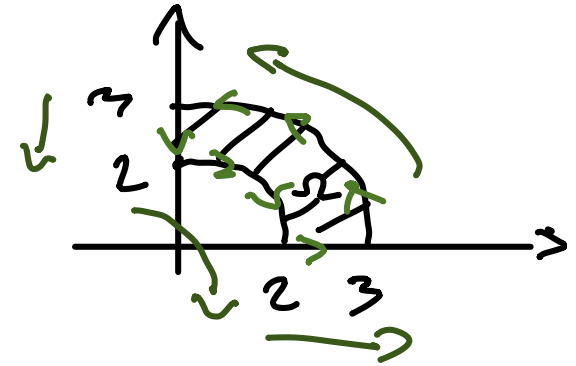
⊕ ← paramétrisation
qui se le domaine
à gauche.

$$\begin{aligned} \int_{\partial \Omega} F \cdot dt &= \int_0^{2\pi} \langle (-\sin t, \cos t), (-\sin t, \cos t) \rangle dt = 2\pi \\ &= \iint_{\Omega} \text{rot } F(x, y) dx dy \end{aligned}$$

$$(ii) \Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: x, y \geq 0, 4 < x^2 + y^2 < 9\}$$

$$F(x, y) = \left(\frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{y}{x^2 + y^2} \right)$$

$$\text{rot } F = \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{y}{x^2 + y^2} \right] - \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{x}{x^2 + y^2} \right] = \frac{2xy - 2x}{(x^2 + y^2)^2}$$



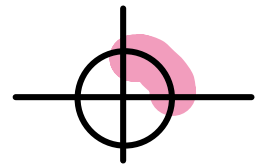
Coordonnées pour Ω : polaires:

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta, \quad r \geq 0, \quad \theta \in [0, 2\pi].$$

$$4 < x^2 + y^2 < 9 \iff 4 < r^2 < 9 \iff 2 < r < 3$$

$$x, y \geq 0 \iff r \cos \theta, r \sin \theta \geq 0 \iff \cos \theta, \sin \theta \geq 0$$

$$\iff \theta \in [0, \pi/2]$$



Jacobien: r

$$\iint_{\Omega} \text{rot } F(x, y) dx dy = \int_2^3 \int_0^{\pi/2} \frac{\text{rot } F(r \cos \theta, r \sin \theta)}{r^4} \cdot \underbrace{r}_{\text{Jacobien}} d\theta dr$$

$$= \int_2^3 \int_0^{\pi/2} \frac{2}{r} \cos \theta \sin \theta - \frac{2}{r^2} \cos \theta \, d\theta \, dr$$

primitive de $\cos \theta \sin \theta$

$$\int^{\theta} \cos t \sin t = \frac{1}{2} \sin^2 t$$

$$\cos t \sin t = \frac{e^{it} + e^{-it}}{2} \cdot \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i} = \frac{1}{4i} (e^{2it} - e^{-2it}) = \frac{1}{2} \frac{e^{2it} - e^{-2it}}{2i}$$

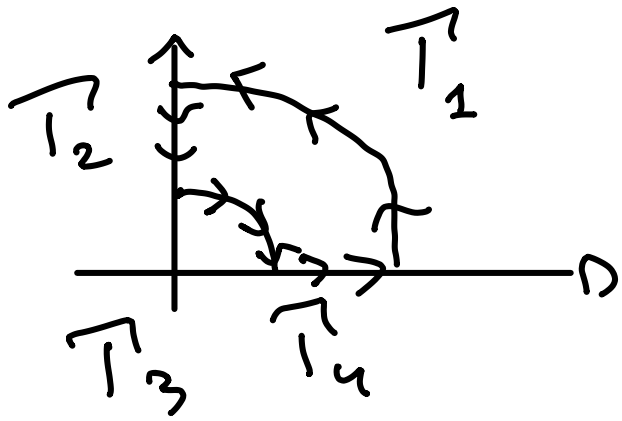
$$= \frac{1}{2} \sin(2t)$$

$$\int^{\theta} \cos t \sin t \, dt = \int^{\theta} \frac{1}{2} \sin(2t) \, dt = -\frac{1}{4} \cos(2\theta)$$

$$= \int_2^3 \frac{2}{r} \left[-\frac{1}{4} \cos(2\theta) \right]_0^{\pi/2} - \frac{2}{r^2} [\sin \theta]_0^{\pi/2} \, dr$$

$$= \dots = -\frac{1}{3} + \log\left(\frac{3}{2}\right)$$

Parametrisation $\partial\Omega$:



$$\Gamma_1: \gamma_1(t) = (3\cos t, 3\sin t), \quad t \in [0, \pi/2]$$

$$\gamma_1'(t) = (-3\sin t, 3\cos t) \quad (+)$$

$$\Gamma_2: \gamma_2(t) = (0, t), \quad t \in [2, 3]$$

$$\gamma_2'(t) = (0, 1) \quad (-)$$

$$\Gamma_3: \gamma_3(t) = (2\cos t, 2\sin t) \quad t \in [0, \pi/2]$$

$$\gamma_3'(t) = (-2\sin t, 2\cos t) \quad (-)$$

$$\Gamma_4: \gamma_4(t) = (t, 0), \quad t \in [2, 3]$$

$$\gamma_4'(t) = (1, 0) \quad (+)$$

$$\int_{\partial\Omega} F \cdot dl = \int_{\Gamma_1} F \cdot dl - \int_{\Gamma_2} F \cdot dl - \int_{\Gamma_3} F \cdot dl + \int_{\Gamma_4} F \cdot dl.$$

On compense le fait
que les paramétrisations
vont dans le mauvais sens.

$$\int_{\Gamma_1} F \cdot dl = \int_0^{\pi/2} \left\langle \left(\frac{3 \cos t}{9}, \frac{1}{9} \right); (-3 \sin t, 3 \cos t) \right\rangle dt = \dots = -\frac{1}{6}$$

$$\int_{\Gamma_2} F \cdot dl = \int_2^3 \left\langle \left(0, \frac{1}{t^2} \right); (0, 1) \right\rangle dt = \dots = \frac{1}{6}$$

$$\int_{\Gamma_3} F \cdot dl = \int_0^{\pi/2} \left\langle \left(\frac{2 \cos t}{4}, \frac{1}{4} \right); (-2 \sin t, 2 \cos t) \right\rangle dt = \dots = 0$$

$$\int_{\Gamma_4} F \cdot dl = \int_2^3 \left\langle \left(\frac{t}{t^2}, \frac{1}{t^2} \right); (1, 0) \right\rangle dt = \dots = \log\left(\frac{3}{2}\right)$$

$$\int_{\partial\Omega} F \cdot dl = -\frac{1}{6} - \left(+\frac{1}{6}\right) - 0 + \log\left(\frac{3}{2}\right) = -\frac{1}{3} + \log\left(\frac{3}{2}\right) = \iint_{\Omega} \operatorname{rot} F(x,y) \, dx \, dy.$$

§ 2.5 Les corollaires du théorème de Green

Définition 2.19 normale extérieure unité.

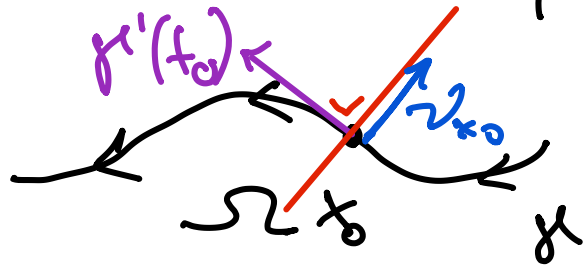
Soit $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ un domaine régulier, $x_0 \in \partial\Omega$. $\nu_{x_0} \in \mathbb{R}^2$ est la normale extérieure unité à Ω au point x_0 si

(i) $|\nu_{x_0}| = 1$ (unité)

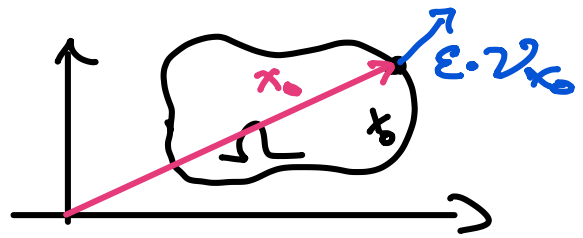
(ii) si $\gamma: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ est une paramétrisation du bord et que

$t_0 \in [a,b]$ est tq $\gamma(t_0) = x_0$, alors $\langle \gamma'(t_0), \nu_{x_0} \rangle = 0$

(normal)



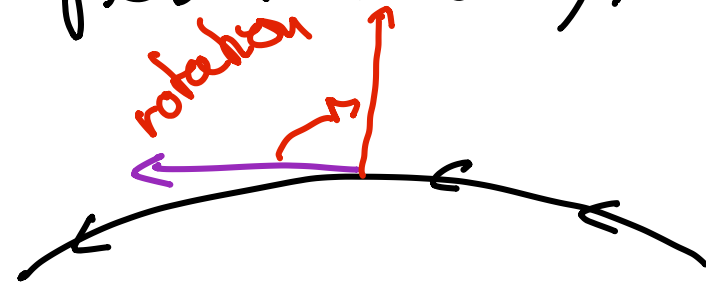
(iii) $\exists \varepsilon_0 > 0$ tq $\forall 0 < \varepsilon < \varepsilon_0$, $x_0 + \varepsilon v_{x_0} \notin \Omega$.



(extérieur)

Si $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ est une paramétrisation de $\partial\Omega$ qui laisse le domaine à gauche (γ est orientée positivement). Alors,

$$v_{\gamma(t)} = \frac{1}{|\gamma'(t)|} (\gamma_2'(t), -\gamma_1'(t))$$



$$R_\theta = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

rotation de $\frac{\pi}{2}$ radians vers la droite
 $\leadsto$ rotation de $-\frac{\pi}{2}$

$$R_{-\frac{\pi}{2}} \begin{pmatrix} \gamma_1'(t) \\ \gamma_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_1'(t) \\ \gamma_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_2'(t) \\ -\gamma_1'(t) \end{pmatrix}$$

Corollaire 2.20: thm de la divergence dans le plan.

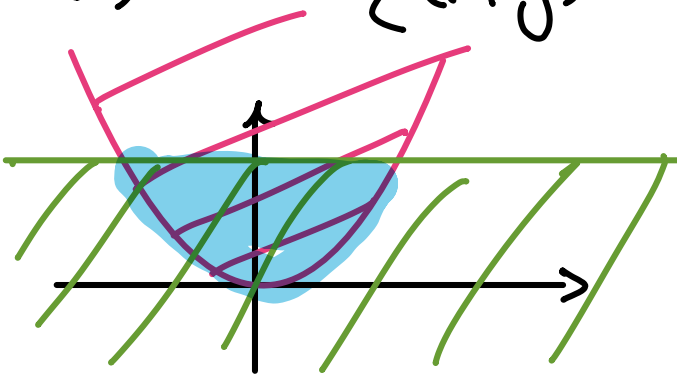
Soit $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ un domaine régulier, $\vec{F} \in C^1(\bar{\Omega}; \mathbb{R}^2)$. Alors,

$$\iint_{\Omega} \operatorname{div} \vec{F}(x, y) dx dy = \int_{\partial \Omega} \langle \vec{F}, \vec{\nu} \rangle dl$$

Idée de la preuve: Appliquer Green à $G(x, y) = (-F_2(x, y), F_1(x, y))$

Exemples 2.21

(i) $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq \underline{x^2} < \underline{y} < 4\}$, $\vec{F}(x, y) = (xy, x^2)$



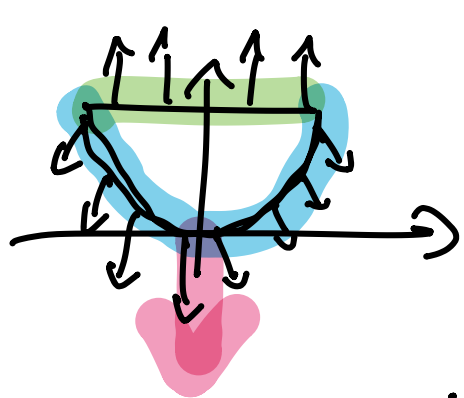
$y=4$ $\operatorname{div} \vec{F} = \frac{\partial}{\partial x} [xy] + \frac{\partial}{\partial y} [x^2] = y$

Coord. pour Ω : coordonnées cartésiennes:
 $x \in [-1, 1]$, $y \in [x^2, 4]$

$$\iint_{\Omega} \operatorname{div} \vec{F}(x, y) dx dy = \int_{-1}^1 \int_{x^2}^4 y dy dx = \int_{-1}^1 \left[\frac{1}{2} y^2 \right]_{x^2}^4 dx = \int_{-1}^1 \frac{1}{2} - \frac{1}{2} x^4 dx$$

$$= \left[\frac{1}{2}x - \frac{1}{10}x^5 \right]_{-1}^1 = 1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5}$$

Paramétrisation du $\partial\Omega$.



γ_1 :

$$\gamma_1(t) = (t, t^2), \quad t \in [-1, 1]$$

$$\gamma_1'(t) = (1, 2t)$$

$$\nu_{\gamma_1(t)} = \frac{1}{|\gamma_1'(t)|} \left((\gamma_1')_2(t), -(\gamma_1')_1(t) \right)$$

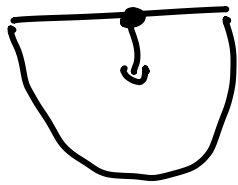
$$= \frac{1}{\sqrt{1+4t^2}} (2t, -1)$$

extérieure ou intérieure? Sur $t=0$ $\nu_{\gamma_1(0)} = (0, -1)$

$$\gamma_2 : \gamma_2(t) = (t, 1), t \in [-1, 1]$$

$$\gamma_2'(t) = (1, 0)$$

$$\nu_{\gamma_2}(t) = (0, -1) \quad \text{interneure} \quad \left(\text{on s'attend à ce que la } 2^{\text{e}} \text{ composante est positive} \right)$$



$\Rightarrow$ on la multiplie

par (-1) : $\nu_{\gamma_2}(t) = (0, 1)$

$$\int_{\gamma_2} \langle F, \nu \rangle dl = \int_{-1}^1 \underbrace{\langle F(\gamma_2(t)), \nu_{\gamma_2}(t) \rangle}_{\langle F, \nu \rangle \text{ au point } \gamma_2(t)} \cdot |\gamma_2'(t)| dt$$

$$= \int_{-1}^1 \langle (t^3, t^2); \underbrace{(2t, 1)}_{\frac{1}{\sqrt{1+4t^2}}} \rangle \cdot \sqrt{1+4t^2} dt = \int_{-1}^1 (2t^4 - t^2) dt = \dots = \frac{4}{5} - \frac{2}{3}$$

Sur $\overline{T}_2$:

$$\int_{\overline{T}_2} \langle F; \nu \rangle dl = \int_{\overline{T}_2} \langle F(\gamma_2(t)); \nu_{\gamma_2(t)} \rangle \cdot |\gamma_2'(t)| dt$$

$$= \int_{-1}^1 \langle (t, t^2); (0, 1) \rangle \cdot 1 dt = \int_{-1}^1 t^2 dt = \frac{2}{3}.$$

$$\Rightarrow \int_{\partial \Omega} \langle F; \nu \rangle dl = \frac{4}{5} - \frac{2}{3} + \frac{2}{3} = \frac{4}{5} = \iint_{\Omega} \operatorname{div} F(x, y) dx dy$$

Remarque 2.22

(i) Si Γ est une partie du bord orientée positivement par

$\gamma: [a, b] \rightarrow \Gamma$. On a

$$\int_{\Gamma} \langle F; \nu \rangle dl = \int_a^b \langle F(\gamma(t)), \frac{(\gamma_2'(t), -\gamma_1'(t))}{|\cancel{\gamma'(t)}|} \rangle \cdot |\cancel{\gamma'(t)}| dt$$

(ii) Correction du signe dans $\int_{\partial\Omega} \langle F; \nu \rangle d\ell$

3 possibilités:

- On connaît ν sans avoir besoin de γ : On calcule $\langle F(x,y); \nu_{x,y} \rangle$ ou intègre sur la courbe. On ne corrige jamais le signe

- On utilise la formule

$$\int_{\gamma} \langle F; \nu \rangle = \int_a^b \langle F(\gamma(t)); (\gamma_2'(t), -\gamma_1'(t)) \rangle dt$$

et on corrige le signe si $(\gamma_2', -\gamma_1')$ pointe vers l'intérieur

- On utilise la même formule et on corrige le signe si γ laisse le domaine à droite.

We pas faire les deux